

PAPER

МУҲИТНИНГ ҚАРШИЛИГИНИ ҲИСОБГА ОЛИБ, МАЖБУРИЙ ТЕБРАНИШЛАРНИ ЎРГАНИШДА ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ФИЗИКАВИЙ МИСОЛЛАРГА ТАДБИҒИ

Эшболтаев Иқбол Мамиржонович^{1, *}, Эркинова Мохларойим
Мухторжон қизи², Эшболтаев Икромжон Иқбол ўғли³

¹Қўқон давлат университети профессори, PhD.

²02/22–Физика ва астрономия гуруҳи талабаси

³02/23–Математика-информатика гуруҳи талабаси

* eshboltayev@gmail.com

Abstract

Мухитнинг қаршилигини ҳисобга олиб, юкнинг ҳаракат қонунини топамиз. Ҳаракатнинг дифференциал тенгламасини эътиборга олиб мувозанат ҳолатида пружинанинг таранглик кучи оғирлик кучи билан мувозанатлашгани учун дифференциал тенгламани содда кўринишга келтириб, бу тенглама юкнинг эркин тебранишларини ифодалайди. У гармоник осцилляторнинг тенгламаси дейилади ва ечимнинг физикавий маъносини аниқлаймиз.

Key words:

муҳитнинг қаршилиги, ҳаракатнинг дифференциал тенгламаси, гармоник тебраниш, эркин тебраниш, иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама, Ньютоннинг иккинчи қонуни, Гук қонуни.

Кириш

Мухитнинг қаршилигини ҳисобга олиб, мажбурий тебранишни дифференциал тенгламалар орқали ўрганиш учун қуйидаги физикавий мисолни ишлашимизга тўғри келади: P оғирликдаги юк нағрузка бўлмагандаги узунлиги l бўлган вертикал пружинага осилган. Юкка қўзғатувчи $Q \sin pt$ даврий куч таъсир этади, бу ерда Q ва p – ўзгармаслар. Пружинанинг массасини ва муҳитнинг қаршилигини ҳисобга олмай, юкнинг ҳаракат қонунини топинг.

Ечилиши, ҳаракатнинг дифференциал тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \mu \frac{dx}{dt} + Q \sin(pt)$$

ёки

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2x = q \sin(pt) \quad ()$$

(1) га мос бир жинсли тенглама илдизлари ($r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$) характеристик тенгламани илдизлари бўлган ($\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2x = 0$) тенгламадан иборат бўлади. Мухитнинг қаршилиги унча катта эмас, яъни $n^2 - k^2 < 0$ деб фарз қиламиз. Бунда бир жинсли тенгламанинг умумий ечими ($x = Ae^{-nt} \sin(k_1t + \alpha)$) кўринишда бўлади:

$$X = Ae^{-nt} \sin(k_1t + \alpha)$$

бу ерда $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$. Бу ечим сўнувчи бўлган эркин тебра-

нишларни аниқлайди.

Мажбурий тебранишларни топиш учун хусусий ечимни $\bar{x} = M \cos(pt) + N \sin(pt)$ кўринишда излаймиз. Қуйидагига эгамиз:

$$k^2 \bar{x} = M \cos pt + N \sin pt$$

$$2n\bar{x}' = -Mp \sin pt + Np \cos pt$$

$$\bar{x}'' = -Mp^2 \cos pt - Np^2 \sin pt$$

Кoeffициентларни тақюослаб, ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$\left. \begin{aligned} M(k^2 - p^2) + 2npN &= 0 \\ -2npM + (k^2 - p^2)N &= q \end{aligned} \right\}$$

Маълумки,

$$\begin{vmatrix} k^2 - p^2 & 2np \\ -2np & k^2 - p^2 \end{vmatrix} = (k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2np \\ q & k^2 - p^2 \end{vmatrix} = -2npq$$

$$\begin{vmatrix} k^2 - p^2 & 0 \\ -2np & q \end{vmatrix} = q(k^2 - p^2)$$

Демак,

$$M = \frac{-2npq}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2},$$

$$N = \frac{q(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}$$

Хусусий ечим қуйидагича ёзилади:

$$\bar{x} = \frac{q}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} [-2np \cos pt + (k^2 - p^2) \sin pt]$$

Бу ифодани қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\bar{x} = \frac{q}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \left[-\frac{2np}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \cos pt + \frac{(k^2 - p^2)}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \sin pt \right]$$

Қуйидаги белгиларни киритамиз:

$$\frac{q}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = B$$

$$\frac{2np}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \sin \delta, \quad \frac{k^2 - p^2}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \cos \delta. \quad (2)$$

Энди x ни

$$\bar{x} = B \sin(pt - \delta) \quad (3)$$

кўринишда ёзамиз.

Ушбу

$$\delta = \arctan \frac{2np}{k^2 - p^2} \quad (4)$$

ифода фаза силжнши деган ном билан юритилади. Умумий ечим, олдинги масаладагига ўхшаш [$x = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha)$ формулага қаранг], эркин тебранишлар ва (15) мажбурий тебранишлар йиғиндисидан иборат бўлади:

$$x = Ae^{-kt} \sin(k_1 t + \alpha) + B \sin(pt_1 - \delta) \quad (5)$$

Биринчи қўшилувчи, юқорида айтганимиздек, сўнувчи тебранишларни аниқлаб, катта k ларда тезда сезилмайдиган бўлиб қолади. (15) мажбурий тебранишларга келадиган бўлсак, уларнинг (14) амплитудалари вақтга боғлиқ эмас ва $q = Q/m$ бўлгани учун даврий қуузнатувчи кучнинг амплитудаси Q га пропорционал. U қ дан

$$A(p) = \frac{1}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \quad (6)$$

кўпайтувчи билан фарқ қилади, бу кўпайтувчи мажбурий тебраниш амплитудасининг қўзнатувчи куч частотасига боғланишини характерлайди.

Бу амплитуданинг максимумини аниқлаймиз. Бунинг учун (6) функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$A'(p) = \frac{(k^2 - p^2) \cdot 2p - 4n^2 p}{[(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2]^{3/2}}$$

$A'(p) = 0$ деб, $(k^2 - p^2) - 2n^2 = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз ($p = 0$ мумкин бўлмаган ҳол сифатида ташлаб юборилади), унинг илдизи ташқи кучларнинг частотасини беради: $p = \sqrt{k^2 - 2n^2}$, бунда, экстремумнинг етарли шартларни текшириш кўрсатишича, мажбурий тебранишлар амплитудаси максимал бўлади. Амплитуданинг максимал кийймаги ушбуга тенг:

$$B = \frac{q}{2n\sqrt{k^2 - n^2}} \quad (7)$$

(7) формула n қанчалик кичик бўлса, тебранишлар амплитудаси шунчалик катта бўлишини кўрсатади. Кичик n ларда p частота хусусий тебранишлар частотаси k га яқин бўлади.

(3) ечим

$$(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2 \neq 0$$

бўлганда хар доим мавжуддир. $(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2 = 0$ бўлган ҳолда $p = k$ ва $n = 0$, натижада (1) тенглама ($\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = q \sin kt$) тенгламага айланади. Бу ерда яна резонанс ходисаси рўй бе-

ради, унда, юқорида кўрсатганимиздек, мажбурий тебранишлар ($\ddot{x} = -\frac{q}{2k} t \cos kt$) кўринишга эга бўлади.

Адабиётлар

1. Brian Dolan, Lecture notes for Mechanics, <http://www.thphys.nuim.ie/Notes/Mechanics/lectures.pdf>
2. Eric Poisson, Advanced mechanics <https://www.physics.uoguelph.ca/poisson/research/mech.pdf>
3. Douglas C. Giancoli, Physics Principles with Applications. New York 2014. <https://www.amazon.com>
4. Strelkov S.P. Механика. Учебное пособие – Москва: Наука, 2011. –361 с.
5. Sivuxin D.P. Umumiy fizika kursi. 1-qism. Toshkent: O'qituvchi, 1981. –520 b.