

PAPER

Когнитивные механизмы усвоения математических понятий: логическая структура «включение в понятие» и «поиска следствий» в контексте современных когнитивных теорий

Асанова Нургиса Рискедди кизи^{1,*}

¹Национальный педагогический университет Узбекистана им. Низами, докторант

* nurgisaasanova@gmail.com

Abstract

Формирование математических понятий является ключевым компонентом развития математического мышления. В данном исследовании анализируются два фундаментальных когнитивных механизма — введение в понятие и поиск следствий, обеспечивающие переход от простого распознавания определения к глубокой концептуальной интернализации и продуктивному применению математических объектов.

Построены логические модели расширенного определения понятия (РОП) и расширенных теорем о его свойствах (РТСП). Оба механизма соотнесены с современными когнитивными теориями: культурно-исторической теорией Л. С. Выготского, теорией концептуальных пространств П. Гарденфorsa и моделью концептуального изменения С. Восниаду.

Показано, что интеграция РОП и РТСП в образовательную практику способствует формированию устойчивой ментальной модели математического понятия, развитию навыков логического вывода и снижению когнитивной нагрузки. Полученные результаты могут быть использованы при разработке учебных материалов и дидактических стратегий для углублённого изучения математики.

Key words: математические понятия, когнитивные механизмы, концептуальное изменение, логическое мышление.

1. Введение

Современные направления в математическом образовании подчёркивают необходимость формирования у учащихся не только знания определений, но и способности строить целостные концептуальные структуры, связывать определения с примерами и выводить логические следствия. Исследования показывают, что значительная часть учащихся ограничивается механическим запоминанием формулировок, не переходя к уровню, на котором понятие становится частью внутренней ментальной модели, пригодной для продуктивного использования. [12]

В ответ на данную проблему в настоящей статье рассматриваются два ключевых когнитивных механизма:

- «Включение в понятие» — процедура отнесения объекта к определённому математическому понятию на основании формального определения либо достаточных условий; [4]

- «Поиск следствий» — выявление системы обязательных свойств, логически вытекающих из определения. [10]

Эти механизмы соотносятся с различными подходами: с семиотическими преобразованиями в трактовке Р. Дюваля [3], с идеей расширения математического дискурса у А. Сфард [9], а также с моделями концептуального развития, представленными в работах П. Гэрденфорса [5] и С. Восниаду [11].

Исследование направлено на:

- описание логической структуры указанных механизмов;
- выявление их когнитивной природы;
- обоснование их роли в формировании математических понятий;
- интеграцию с современными теориями когнитивного развития.

2. Методы

2.1. Дизайн исследования

Работа выполнена в рамках качественного теоретического исследования и включает:

- системный анализ научной литературы (2015–2024 гг.);
- реконструкцию логических структур математических понятий;

- когнитивную интерпретацию полученных моделей;
- сопоставление с признанными теориями когнитивного развития.

2.2. Источники и критерии отбора

Использованы материалы по:

- когнитивной психологии,
- исследованию математического мышления,
- моделям концептуального развития,

Отбор литературы осуществлялся на основе следующих критериев:

- соответствие проблематике формирования математических понятий;
- актуальность (2015–2024 гг.);
- наличие теоретической или эмпирической обоснованности;
- цитируемость в международных базах данных.

2.3. Аналитическая процедура

1. Построение модели расширенного определения понятия (РОП):

$$R(x) \Leftrightarrow P_1(x) \vee P_2(x) \vee \dots \vee P_n(x)$$

2. Построение модели расширенных теорем о свойствах (РТСП):

$$R(x) \Rightarrow P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge \dots \wedge P_n(x)$$

3. Сопоставление полученных моделей с теориями Гэрденфорса [5] и Восниаду [11].

4. Применение моделей к конкретным математическим объектам (например, чётная функция, непрерывность).

3. Результаты

3.1. Модель 1: «Введение в понятие» (РОП) Механизм «введение в понятие» представляет собой процедуру классификации, направленную на определение принадлежности объекта математическому понятию [1]. Он основан на дизъюнктивной структуре:

$$(x) \Leftrightarrow P_1(x) \vee P_2(x) \vee \dots \vee P_n(x)$$

Каждый элемент P_i является либо частью формального определения, либо достаточным условием, либо характерным идентификационным признаком.

Пример. Функция является чётной, если выполняется одно из условий:

- $f(-x) = f(x)$;
- функция состоит только из чётных степеней;
- её график симметричен относительно оси y .

Указанная процедура соответствует РОП как алгоритму классификации.

3.2. Модель 2: «Поиск следствий» (РТСП)

Данный механизм описывает логическое развёртывание содержания понятия [?] и основан на конъюнкции:

$$R(x) \Rightarrow P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge \dots \wedge P_n(x).$$

Например, для чётной функции обязательными следствиями являются:

- симметрия относительно оси y ;
- сохранение чётности при сложении;
- определённые свойства производных.

Эти характеристики не входят непосредственно в определение, однако являются необходимыми логическими следствиями. Таким образом, РТСП представляет собой систематизированный набор всех обязательных свойств, вытекающих из определения.

4. Обсуждение

4.1. Роль РОП и РТСП в когнитивном развитии

Механизм РОП активирует:

- анализ признаков,
- сопоставление объектов,
- классификационные действия.

Механизм РТСП включает:

- логический вывод,
- построение рассуждений,
- применение понятий при решении задач.

Тем самым РОП обеспечивает вход в концептуальную область, а РТСП — движение внутри неё [7].

4.2. Связь с теорией Выготского В рамках культурно-исторической теории:

РОП соответствует стадии интериоризации научного определения;

РТСП отражает этап построения внутренней системы теоретических рассуждений.

Ученик сначала овладевает научным знаком, затем переходит к оперированию системой следствий, формируя теоретическое мышление. [13]

4.3. Интерпретация в модели концептуальных пространств П. Гэрденфорса Согласно данной теории, понятие представляет собой область многомерного семантического пространства. [5]

РОП определяет принадлежность объекта этой области.

РТСП описывает внутреннюю структуру области — совокупность обязательных свойств.

Так, область «чётных функций» включает все функции, обладающие симметрией относительно оси y , а РТСП задаёт структуру этой области.

4.4. Концептуальное изменение по С. Восниаду Учащиеся нередко опираются на интуитивные, «бытовые» модели понятий. [11] РОП расширяет такую модель, вводя формальные признаки, примеры и контрпримеры.

РТСП приводит к её перестройке: формируется понимание обязательных свойств, возникающих из определения.

Это отражает процесс концептуального изменения — переход к научному уровню мышления. [6]

4.5. Практические выводы для образования Интеграция РОП и РТСП позволяет: развивать доказательное мышление;

переходить от знания определения к его функциональному использованию;

формировать устойчивые концептуальные структуры;

снижать когнитивную нагрузку за счёт систематизации материала.

5. Заключение

Предложенные модели РОП и РТСП:

способствуют формированию глубоких ментальных моделей математических понятий;

систематизируют процесс обучения определению и применению понятий;

развивают логическое и доказательное мышление;

обеспечивают переход от формального знания определения к его содержательному пониманию.

Интеграция данных моделей с теориями Выготского, Гэрденфорса и Восниаду показывает, что усвоение математического понятия представляет собой последовательность когнитивных уровней: от классификации — к интернализации, затем к выводу следствий и к концептуальной перестройке.

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании образовательных

программ, разработке учебных материалов и формировании метапредметных компетенций учащихся.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Arcavi, A. (2017). The role of visual representations in mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 95(1), 1–17.
2. Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets*. Jossey-Bass.
3. Duval, R. (2017). Understanding mathematics through semiotic representations. *Mathematics Education Research Journal*, 29, 379–401.
4. Edwards, B., & Ward, M. (2019). Defining in mathematics teaching. *Journal of Mathematical Behavior*, 54, 100–115.
5. Gärdenfors, P. (2017). *The geometry of meaning*. MIT Press.
6. Margolis, E., & Laurence, S. (2019). *The Conceptual Mind*. MIT Press.
7. Murphy, G. (2016). *The Big Book of Concepts*. MIT Press.
8. Presmeg, N. (2020). Visualization and mathematical thinking. *ZDM Mathematics Education*, 52, 101–114.
9. Sfard, A. (2018). *Thinking as communicating*. Cambridge University Press.
10. Tall, D. (2018). *How Humans Learn to Think Mathematically*. Cambridge University Press.
11. Vosniadou, S. (2019). Conceptual change in learning. *Educational Psychologist*, 54(3), 203–219.
12. Weber, K., et al. (2017). Students' reasoning about definitions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 48(3), 250–280.
13. Выготский, Л. С. (2019). *Мышление и речь*. Санкт-Петербург; Питер. — 431 с. — ISBN 978-5-4461-1109-1.